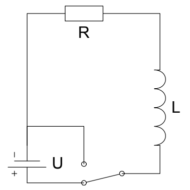
Урок 26 (7.03.2019)
Энергия магнитного поля. Механический эквивалент.

0. Мысленный эксперимент.

Представим себе схему, состоящую из последовательно соединённых источника тока, сопротивления и катушки индуктивности. Предположим, схема у нас находится в стационарном состоянии, и по ней течёт постоянный ток.



Представим, теперь, себе, что источник тока мгновенно закорачивают. Что произойдет в этом случае?

Если бы в схеме не было катушки индуктивности, то, в соответствии с законом Ома ток бы мгновенно прекратился (т.е. ЭДС мгновенно становится равной нулю). Но теперь у нас при уменьшении тока в катушке возникнет ЭДС индукции, стремящаяся воспрепятствовать изменению тока в катушке (и, следовательно, изменению магнитного потока, пронизывающего контур). Т.е. у нас ток мгновенно не прекратится! Некоторое время без источника ЭДС в схеме будет циркулировать ток, и значит, будет выделяться тепло на сопротивлении. Это в свою очередь значит, что после отключения батареи в схеме осталась энергия – в катушке индуктивности.

1. Расчет энергии магнитного поля.

Очевидно что, в конце концов, в нашем мысленном эксперименте вся энергия, запасённая в системе, выделится в виде джоулевой теплоты. За время dt на сопротивлении R выделяется количество теплоты

$$dQ = I^2 R \cdot dt\,.$$

По закону Ома ток в цепи будет равен (когда батарея уже отключена!)

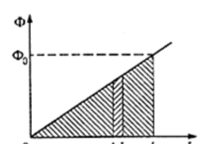
$$I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{L}{R}\frac{dI}{dt},$$

где ε – возникающая в схеме ЭДС самоиндукции.

Подставляя ток в выражение для выделяющейся теплоты, получим:

$$dQ = I \cdot \left(IR \cdot dt\right) = I \cdot \left(-L \cdot dI\right) = -LI \cdot dI = -\Phi\left(I\right) \cdot dI\,.$$

«Школьное решение»:



Т.к. $\Phi\left(I\right) \sim I$, то график функции $\Phi\left(I\right)$ от тока будет представлять собой прямую, а $_\Delta Q$ на нём будет соответствовать площадь «столбика» (см. рис.) Тогда полное количество выделившейся теплоты, будет равно площади под графиком, т.е. $1/2\,\Phi_0 I_0$ (где Φ_0 и I_0 – магнитный поток и ток в момент отключения источника соответственно).

То же самое можно получить, интегрируя полученное выражение:

$$Q_{полн} = \int_{I_0}^{0} -LI \cdot dI = -\frac{LI^2}{2}\bigg|_{I_0}^{0} = \frac{LI^2}{2}$$

Другими словами можно сказать, что энергия магнитного поля W, создаваемого током I в катушке с индуктивностью L, равна

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}.$$

Тут интересно сравнить, как мы решали две похожие задачи: первая – разряд катушки индуктивности в виде переходного процесса (когда мы искали функцию $I(t)$) и определение энергии магнитного поля в катушке (когда мы ищем выделившуюся энергию за бесконечное время при разряде катушки).

2. Объёмная плотность энергии магнитного поля.

Здесь можно пофилософствовать на тему: «что это за энергия – поля или катушки с током?»

Рассмотрим длинный соленоид с количеством витков на единицу длины n. Его индуктивность равна $L = \mu_0 n^2 V$, где $V = lS$ – объем соленоида. При этом поле внутри него равно $B = \mu_0 nI$, откуда $I = \frac{B}{\mu_0 n}$. Подставляя это в формулу для энергии магнитного поля $W = \frac{LI^2}{2}$, получим:

$$W = \frac{1}{2\mu_0} B^2 V,$$

или

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0},$$

где w – объёмная плотность энергии магнитного поля.

3. Механический эквивалент.

Заметим, что мы можем сопоставить явления в RC и RL-цепях и механическими явлениями:

x (координата)	q (заряд)
$v = \frac{dx}{dt}$ (скорость)	$I = \frac{dq}{dt}$ (ток)
$a = \frac{d^2q}{dt^2}$ (ускорение)	$\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$ (непонятная величина)
$F = ma$ (2 закон Ньютона)	$U = -L\frac{dI}{dt}$ (ЭДС самоиндукции)
m (масса)	L (индуктивность)
F (сила)	U (напряжение)
$F = kx$ (закон Гука)	$U = \frac{q}{C}$ (ёмкость)
k (коэффициент жёсткости)	$1/C$

$\frac{kx^2}{2}$ (энергия пружины)	$\frac{q^2}{2C}$ (энергия конденсатора)
$\frac{mv^2}{2}$ (кинетическая энергия)	$\frac{LI^2}{2}$ (энергия соленоида)